Chapitre 11

Applications

Plan du chapitre

1 Généralités . . . 2
1.1 Applications . . . 2
1.2 Graphe d'une application . . . 3
1.3 Applications usuelles . . . 4
2 Image directe et image réciproque . . . 4
2.1 Image directe . . . 4
2.2 Image réciproque . . . 6
2.3 Propriétés théoriques des images directe et réciproque . . . 7
3 Opérations sur les applications . . . 9
3.1 Relation d'égalité entre applications . . . 9
3.2 Restriction, prolongement . . . 9
3.3 Composition d'applications . . . 10
4 Injection, surjection, bijection . . . 11
4.1 Injection . . . 11
4.2 Lien entre injectivité et unicité . . . 12
4.3 Surjection . . . 13
4.4 Bijection, application réciproque . . . 15
4.5 Propriétés des applications réciproques . . . 17
4.6 Compléments sur la bijectivité et les applications réciproques . . . 19
5 Transformations du plan complexe . . . 20
5.1 Translations . . . 20
5.2 Homothétie . . . 21
5.3 Rotations . . . 22
5.4 Similitudes directes . . . 23
6 Méthodes pour les exercices . . . 26

Hypothèse

E, F, G, H, E', F' sont des ensembles quelconques.

Document sous licence CC BY-NC-SA 4.0. Conditions de réutilisation sur https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

1 Généralités

1.1 Applications

Définition 11.1 – **Définition "intuitive" d'application**

On dit que f est une application de E dans F, si à chaque élément x de E, f associe un *unique* élément de F. Cet élément est noté $f(x)$.

- E est appelé l'ensemble de départ de f.
- F est appelé l'ensemble d'arrivée de f.

Notation. On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou encore F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Exemple.
- Les fonctions usuelles sont des applications : par exemple cos, sin, exp sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ou encore des éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ notée :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned} \qquad \text{donc } u \in \dots$$

- Étant donné un ensemble E, on peut définir des applications :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(E) \\ A &\mapsto \overline{A} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathscr{P}(E)^2 &\to \mathscr{P}(E) \\ (A,B) &\mapsto A\cup B \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h : \mathscr{P}(E)^2 &\to \mathscr{P}(E) \\ (A,B) &\mapsto A\cap B \end{aligned}$$

- I étant un ensemble quelconque, une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de E peut être vue comme une application de I dans $\mathbb{R}$ notée :

$$\begin{aligned} a : I &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned} \qquad \text{donc } a \in E^I$$

Notation. Sauf mention contraire, la notation "$f : E \to F$" indique que f est une application ayant respectivement E et F comme ensembles de départ et d'arrivée. Cela entraine que f est définie sur E tout entier.

Remarque. Dans certains exercices, on définit une application $f : E \to F$ en précisant l'expression de $f(x)$, et on demande ensuite de montrer que cette application est bien définie, c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'une application. Cela signifie qu'il faut vérifier que pour ***chaque*** élément $x \in E$:

1. $f(x)$ ait un sens.
2. $f(x)$ appartienne à F.
3. Plus rarement, que $f(x)$ soit défini de manière unique.

11.2 ★ On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Montrer que f est bien définie.

Solution.

Exemple. Les applications suivantes ne sont PAS bien définies. Expliquer pourquoi :

$$\begin{array}{lll} f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{U} & f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R} & f_3 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ \quad z \mapsto e^z & \quad n \mapsto \sqrt{2-n} & \quad n \mapsto \text{La racine } n\text{-ième de } i \end{array}$$



Dans toutes ces écritures, les variables x, a, A, z... sont des variables **muettes**.

Remarque. Dans le programme de MPSI, il est explicitement écrit que les mots "applications" et "fonctions" sont considérés comme interchangeables. On adoptera cette convention dorénavant.

Remarque (Rappel)**.** Si on écrit par exemple "$f : x \mapsto \sqrt{x}$" sans préciser les ensembles E ou F, alors on prend $F = \mathbb{R}$ et $E = D_f$.

1.2 Graphe d'une application

Définition 11.3

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle graphe de f le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\left\{(x, f(x)) \;\middle|\; x \in E\right\}$$

Lorsque f est une fonction réelle de la variable réelle ($E \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$), on note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f.

Exemple. On pose $f : x \mapsto x^2$. Le graphe de f est l'ensemble

$$\mathscr{C}_f = \left\{(x, x^2) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

$\mathscr{C}_f$ est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ sera dans l'ensemble $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $y_0 = x_0^2$.

Remarque. Comme le montre l'exemple ci-dessus, $\mathscr{C}_f$ est une **courbe** de $\mathbb{R}^2$: c'est une ligne sans épaisseur tracée sur le plan $\mathbb{R}^2$.

1.3 Applications usuelles

Exemple. Pour tout ensemble E, on note id_E l'application identité de E définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Définition 11.4

Soit E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$. On note $\mathbb{1}_A$ l'application indicatrice sur A définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

11.5 ★★☆ Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

Solution.

2 Image directe et image réciproque

2.1 Image directe

Étant donné $f : E \to F$, on a déjà vu au chapitre précédent une définition de l'ensemble $f(E)$: c'est l'ensemble des valeurs de $f(x)$ lorsque x parcourt E. Nous allons généraliser cette définition :

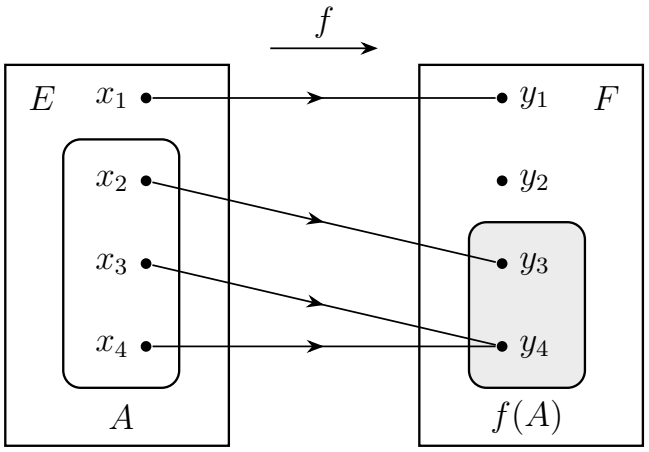
Définition 11.6 – Image directe

Soit $f : E \to F$ une application et $A \in \mathscr{P}(E)$.
On définit l'image directe de A par f comme étant l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

c'est-à-dire

l'ensemble des valeurs $f(x)$ lorsque x parcourt A



Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- Si $A = \{0,3,5\}$, alors $f(A) = \ldots\ldots$
- Si $A = [-2,1]$, alors $f(A) = \ldots\ldots$
- $f(\mathbb{R}) = \ldots\ldots$

La notation $f(A)$ peut être source de confusion :

- Lorsqu'on écrit "$f(x)$", on applique f à un **élément** $x \in E$, et on obtient un **élément** $f(x) \in F$.
-

Ainsi, "$f(X)$" peut avoir un sens tout à fait différent si $X \in E$ ou si $X \in \mathscr{P}(E)$.

Remarque. Lorsque f est une fonction continue de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que A est un intervalle, on peut déterminer $f(A)$ via un tableau de variations.

Exemple. On pose $f : x \mapsto 4 - x^2$ et $A = [-3,2]$. Déterminer $f(A)$.

Cependant, dans un cas plus général, il faut utiliser une caractérisation de l'appartenance à $f(A)$:

Théorème 11.7 – Caractérisation de $y \in f(A)$

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. Pour tout $y \in F$,

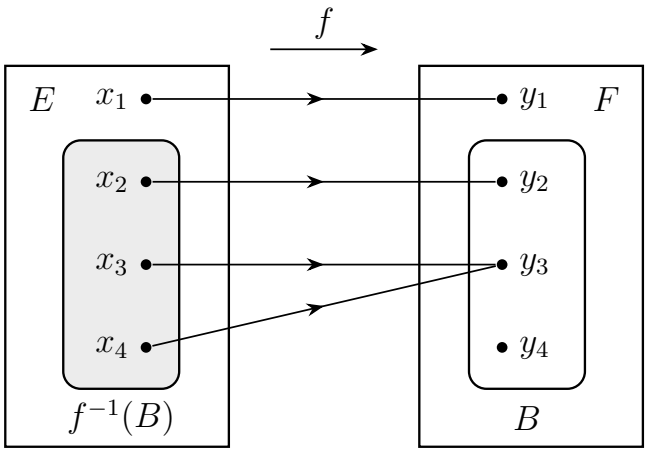
2.2 Image réciproque

Définition 11.8 – Image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On définit l'image réciproque de B par f comme étant l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont envoyés par f dans l'ensemble B.



La notation $f^{-1}(B)$ peut être source de confusion :

- Lorsqu'on écrit "$f^{-1}(y)$", on applique f^{-1} à un **élément** $y \in F$, et on obtient un **élément** $f^{-1}(y) \in E$. **L'écriture $f^{-1}(y)$ n'a un sens QUE si f est bijective**[1].
-

Ainsi, "$f^{-1}(Y)$" peut avoir un sens tout à fait différent si $Y \in F$ ou si $Y \in \mathscr{P}(F)$.

Pour comprendre l'ensemble $f^{-1}(B)$, il est primordial d'utiliser la caractérisation suivante :

Théorème 11.9 – Caractérisation de $x \in f^{-1}(B)$

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. Pour tout $x \in E$,

Exemple.

- Soit $f : x \mapsto x^2$ et $B = \{4\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$.

- Soit $f : x \mapsto x^2$ et $B = \big[4,9\big]$. Déterminer $f^{-1}(B)$.

2.3 Propriétés théoriques des images directe et réciproque

Théorème 11.10 – **Propriétés des images directes et réciproques**

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ et $B, B' \in \mathscr{P}(F)$.

1. L'inclusion est conservée quand on applique f ou f^{-1} :
   (a) $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
   (b) $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
2. Les opérations f et f^{-1} se distribuent sur $\cup$:
   (a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
   (b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
3. L'opération f^{-1} se distribue sur $\cap$, mais pas f :
   (a) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (attention ce n'est qu'une inclusion !)
   (b) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Démonstration. Les preuves des assertions 1.(a) et 1.(b) sont laissées en exercice. On va d'abord prouver les assertions 2.(b) et 3.(b), qui sont plus simples (si, si !).

- Prouvons 2.(b).

- Prouvons 3.(b).

- Prouvons 2.(a).

- Prouvons 3.(a).

□

Remarque. La ligne $(*)$ n'est pas équivalente à la ligne qui lui précède. En effet si on suppose $(*)$ on peut a priori avoir $x \neq x'$: on ne peut pas en déduire que y est l'image d'un élément de $A \cap A'$. C'est pour cette raison que l'on peut avoir $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$. Contre-exemple :

$$A = \{0\} \qquad A' = \{1\} \qquad f : x \mapsto \pi$$

alors $f(A) = f(A') = \{\pi\}$ et $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$.

3 Opérations sur les applications

3.1 Relation d'égalité entre applications

Définition 11.11

Soit $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On dit que f et g sont égales et on écrit $f = g$ si :

$$\begin{cases} E = E' \\ F = F' \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad f(x) = g(x)$$

Dans le cas contraire, on écrira $f \neq g$.

$f = g$ signifie que f et g ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée et sont égales en tout point.

3.2 Restriction, prolongement

Définition 11.12 – Restriction

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $f : E \to F$. On appelle restriction de f à A, la fonction notée $f|_A$ définie par :

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, $f|_A(x) = f(x)$: la seule chose qui change est que l'application $f|_A$ est définie *seulement* sur A !

Exemple. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Alors les fonctions $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ et $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ sont décroissantes, mais f ne l'est pas.

Définition 11.13

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $f : A \to F$. On appelle prolongement de f à E toute application $g : E \to F$ pour laquelle $g_{|A} = f$, i.e. pour laquelle $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$.

Exemple. On peut définir l'application signe : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par : $\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On peut définir un prolongement) $\mathbb{R}$ de cette fonction en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3.3 Composition d'applications

Définition 11.14 – Composition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle composée de g et f l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple. Composer à gauche ou à droite par l'identité ne change pas le résultat : étant donné une fonction $f : E \to F$, on a :

$$f \circ \mathrm{id}_E = f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_F \circ f = f$$

Exemple.

$$\begin{array}{lllll} \text{On pose} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ & g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} & \text{Alors} & g \circ f : \ldots \to \ldots \quad f \circ g : \ldots \to \ldots \\ & x \mapsto x^2 & x \mapsto \sqrt{x} & & x \mapsto \ldots \qquad\quad x \mapsto \ldots \end{array}$$

Remarque. On a en général $g \circ f \neq f \circ g$, comme le montre l'exemple ci-dessus. Cependant, si f et g sont deux applications telles que $g \circ f = f \circ g$, on dit que f et g commutent.

Remarque. On considère $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ avec $F \neq F'$. Puisque $F \neq F'$, d'après la Définition 11.14, on ne pourrait pas définir $g \circ f$... Cependant, on considère que l'application $g \circ f$ est bien définie à condition que pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F'$, ce qui permet de donner un sens à $g(f(x))$. Cela revient à dire que $f(E) \subset F'$. Cf exemple suivant :

Exemple. On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

L'application $g \circ f$ n'aurait techniquement pas de sens selon la Définition 11.14, mais dans les faits, cela ne pose pas de problème car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc en particulier sur $f(\mathbb{R})$.

Théorème 11.15 – "Associativité" de la composition

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$, $h \in \mathscr{F}(G,H)$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Démonstration. Les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont toutes deux des éléments de $\mathscr{F}(E,H)$, donc ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée. Enfin, pour tout $x \in E$, on a :

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$$

Ainsi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

Remarque. Cette propriété d'associativité permet d'écrire $h \circ g \circ f$ sans ambiguïté. C'est la même situation que les opérations $\cup$, $\cap$, "et", "ou" qui sont, elles aussi, associatives.

4 Injection, surjection, bijection

4.1 Injection

Définition 11.16 – **Injection**

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une injection (ou que f est injective) lorsque :

Une conséquence de l'injectivité est la suivante : pour tous $a, b \in E$, on a

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

Autrement dit, on peut "simplifier" par f si elle est injective. On notera que l'implication ci-dessus ou celle de la définition est même une équivalence, mais en pratique seul le sens direct est utile et à retenir.

Exemple. Soit $f : \boxed{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On peut montrer que f est injective :

Soit $x, x' \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$:

$$f(x) = f(x') \implies x^2 = (x')^2 \implies |x| = |x'| \implies x = x' \qquad \text{car } x, x' \in \mathbb{R}_+$$

d'où f est injective.

En particulier, si $a, b \in \boxed{\mathbb{R}_+}$, alors on peut écrire $a^2 = b^2 \implies a = b$.

11.17 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Montrer que f est injective.

Solution.

Remarque. Pour montrer que f n'est PAS injective, on montre la négation de la définition, donc :

Exemple. Soit $f : \boxed{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas injective car ...
Pour cette raison, si $a, b \in \mathbb{R}$, on ne peut PAS écrire que $a^2 = b^2$ impliquerait $a = b$.

Théorème 11.18

La composée d'applications injectives est injective.

Démonstration.

□

4.2 Lien entre injectivité et unicité

Définition 11.19

Soit $P(x)$ une assertion qui dépend d'un élément x de E. On dit qu'il y a unicité (mais pas forcément existence) d'un élément x de E qui vérifie $P(x)$ si :

$$\forall x, x' \in E \qquad P(x) \text{ et } P(x') \implies x = x'$$

En particulier, si $P(x)$ est une équation, sur x, alors l'assertion ci-dessus affirme qu'il y a unicité de la solution. Toutefois, l'assertion ci-dessus n'assure pas l'existence de la solution : si aucun $x \in E$ ne vérifie $P(x)$, l'assertion est vraie par la convention "Faux $\implies$ ... est vrai". L'existence d'une solution est donnée par : $\exists x \in E \quad P(x)$.

Théorème 11.20

L'application $f : E \to F$ est injective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation

$$(\text{Eq}_y) : \quad f(x) = y$$

admet **au plus / au maximum** une solution x dans E. Il y a donc *unicité* (mais pas forcément existence) d'une telle solution.

Démonstration.

□

Remarque. Si f est une fonction réelle de la variable réelle, on peut reconnaitre si elle est injective ou non à partir de son graphe :

- Si on peut tracer une droite horizontale qui coupe le graphe de f en au moins deux points, alors f n'est pas injective.
- Sinon, f est injective (auquel cas chaque droite horizontale coupe le graphe de f en zéro ou un point).

Exemple. Grâce à son graphe, on remarque que la fonction cosinus n'est pas injective (on peut le montrer rigoureusement avec la négation de la définition). L'égalité $\cos(a) = \cos(b)$ ne peut donc pas se simplifier en $a = b$.
Grâce à son graphe, on remarque que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective (on peut le montrer rigoureusement avec la définition). Ainsi, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ entraine $a = b$.

4.3 Surjection

Définition 11.21 – **Surjection**

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une surjection (ou que f est surjective) lorsque tout élément y de F admet **au moins un antécédent** par f :

Exemple.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}_+}$ définie par $f(x) = x^2$. On peut montrer que f est surjective :
  Soit $y \in \mathbb{R}_+$. **On pose** $x = \sqrt{y}$ (ou $x = -\sqrt{y}$). Alors :
  $$f(x) = x^2 = y$$
  donc f est surjective.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent par f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2 \neq -1$.

Méthode

Pour vérifier que f est surjective, on peut, étant donné $y \in F$ quelconque, chercher une valeur $x \in E$ telle que $f(x) = y$.

11.22 ★★☆ Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Montrer que f est surjective.

Solution.

Théorème 11.23

La composée d'applications surjectives est surjective.

Démonstration.

□

Théorème 11.24

L'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\mathrm{Eq}_y) : \quad f(x) = y$$

admet **au moins / au minimum** une solution (dans E). Il y a donc *existence* d'une solution.

Théorème 11.25

Soit $f : E \to F$ une application. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Démonstration.

□

4.4 Bijection, application réciproque

On a vu que :

- f est surjective ssi tout $y \in F$ admet **au moins un** antécédent $x \in E$ par f, i.e. il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- f est injective ssi tout $y \in F$ admet **au plus un** antécédent $x \in E$ par f, i.e. l'équation $f(x) = y$ admet au plus / au maximum une solution $x \in E$.

Définition 11.26 – **Bijection**

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une bijection (ou que f est bijective) lorsque f est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, f est bijective ssi tout élément y de F admet **exactement un antécédent** par f :

Exemple. Par les exemples 11.17 et 11.22, l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ est bijective.

On a vu que :

- f est surjective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet **au moins** une solution dans E.
- f est injective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet **au plus** une solution dans E.

Théorème 11.27

L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\mathrm{Eq}_y) : \quad f(x) = y$$

admet **exactement** une solution (dans E). Il y a donc *existence et unicité* de la solution.

Définition 11.28 – **Application réciproque**

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors on peut définir une application appelée la réciproque de f et notée

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

où $f^{-1}(y)$ est **l'unique** solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Exemple. La réciproque de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$ est $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(x) = \ln x$.

Méthode

Pour montrer que $f : E \to F$ est bijective, on peut, pour tout $y \in F$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ et montrer qu'elle admet une unique solution $x_0(y)$ (x_0 est une fonction de y).
De plus, la réciproque de f est alors $f^{-1} : y \mapsto x_0(y)$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. On a vu à l'exercice 11.22 que pour tous $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(x) = y \iff x = \frac{y+1}{y-2}$$

Cela suffit pour montrer que f est bijective et $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-2}$.

Exemple. Soit $f : [2, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Montrer que f est bien définie et est bijective.

4.5 Propriétés des applications réciproques

Théorème 11.29

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$:

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$$

Théorème 11.30

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective. On a :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{i.e.} \qquad \forall x \in E \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \qquad \text{i.e.} \qquad \forall y \in F \quad f(f^{-1}(y)) = y$$



On ne peut écrire f^{-1} que si on a montré que f est bijective. La seule exception est l'ensemble $f^{-1}(B)$ avec $B \subset F$, qui lui a un sens, que f soit bijective ou non.

Théorème 11.31

Soit $f : E \to F$. On suppose qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Alors f est bijective et on a $g = f^{-1}$.

En particulier, il n'y a qu'une application g qui vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et c'est $g = f^{-1}$.

Démonstration.

□

Remarque. Dans le cas où $f : E \to E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_E$, on a donc $f^{-1} = f$. On dit alors que f est une involution sur E.

Exemple.
- L'application id_E est une involution sur E : elle est donc bijective et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.
- Les applications $z \mapsto -z$ et $z \mapsto \bar{z}$ sont des involutions sur $\mathbb{C}$. Elles sont donc bijectives et sont leur propre application réciproque.

Théorème 11.32

La composée d'applications bijectives est bijective.

Démonstration.

□

Théorème 11.33

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors :
1. L'application $f^{-1} : F \to E$ est également bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. L'application $g \circ f : E \to G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.

□

4.6 Compléments sur la bijectivité et les applications réciproques

Remarque (***jectivité dépend des ensembles de départ et d'arrivée)**.** On pose $f : x \mapsto x^2$. Selon les ensembles de départ et d'arrivée de f, déterminer s'il s'agit d'une injection, d'une surjection ou d'une bijection.

$f : x \mapsto x^2$	Injection	Surjection	Bijection
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$			
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$			

Définition 11.34

Soit $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On dit que "f est surjective de A sur B" si $\quad \forall y \in B \quad \exists x \in A \quad f(x) = y$
- On dit que "f est bijective de A sur B" si $\quad \forall y \in B \quad \exists! x \in A \quad f(x) = y$

Exemple. La fonction exponentielle est la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

f n'est pas bijective car elle n'est pas ..... Par contre f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa réciproque est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

Parfois, on notera *abusivement* cette réciproque f^{-1} bien que f elle-même ne soit pas bijective. Cet abus n'est pas gênant en pratique car on a toujours $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Théorème de la bijection.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, on peut montrer que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ via le théorème de la bijection monotone. Mais il y a deux limites :

1. Cela ne marche que si f part d'un intervalle et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Le théorème ne donne pas l'expression de f^{-1}, juste sa monotonie et sa continuité.

Remarque. Soit $f : E \to F$ une application bijective et $B \subset F$. Alors l'ensemble $f^{-1}(B)$ peut représenter :

- L'image réciproque de B par f :

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E \;\middle|\; f(x) \in B\right\} \qquad (*)$$

  (qui est défini même si f n'est pas bijective)

- L'image directe de B par f^{-1} :

$$f^{-1}(B) = \left\{f^{-1}(y) \;\middle|\; y \in B\right\} = \left\{x \in E \mid \exists y \in B \quad f^{-1}(y) = x\right\} \qquad (**)$$

  (qui n'est défini QUE si f est bijective)

Les ensembles $(*)$ et $(**)$ ont la même notation, mais cela ne pose pas de problème car ils sont en fait égaux.

5 Transformations du plan complexe

Dans cette section, on identifie complètement $\mathbb{C}$ au plan complexe. On pourra dire que z est un point du plan, et qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'applique aussi bien à un complexe de $\mathbb{C}$ qu'à un point du plan complexe.

Définition 11.35

On appelle transformation du plan (complexe) toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est bijective.

Il existe énormément de transformations du plan complexe. Les transformations au programme de MPSI sont celles qui ont un lien avec la géométrie.

5.1 Translations

Définition géométrique d'une translation. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application qui à tout point M associe le point M' défini par la relation :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{u}$$

En notant z, z' et u les affixes de M, M' et $\overrightarrow{u}$, cette relation se réécrit dans les complexes :

$$z' = z + u$$

Ceci permet d'obtenir une définition plus pratique via une application :

Définition 11.36 – **Application translation**

Soit $u \in \mathbb{C}$. La translation de "vecteur" u est l'application :

$$\begin{aligned} \tau_u : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z+u \end{aligned}$$

Remarque. La notation τ_u n'est pas officielle, tout comme les notations $h_{\omega,k}$ et $\rho_{\omega,\theta}$ qu'on va voir plus loin.

Théorème 11.37

Soit $u \in \mathbb{C}$. La translation τ_u est une transformation du plan (i.e. est bijective) et son inverse est la translation τ_{-u}, i.e. la translation de "vecteur" $-u$.

Démonstration.

□

5.2 Homothétie

Soit Ω un point du plan complexe et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application qui à tout point M associe le point M' défini par la relation :

Définition 11.38 – **Application homothétie**

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de "centre" ω et de rapport k est l'application :

Théorème 11.39

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie $h_{\omega,k}$ est une transformation (i.e. est bijective) et son inverse est l'homothétie $h_{\omega,\frac{1}{k}}$, i.e. l'homothétie de "centre" ω et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $h_{\omega,k} \circ h_{\omega,\frac{1}{k}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et $h_{\omega,\frac{1}{k}} \circ h_{\omega,k} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. □

Exemple. L'homothétie de centre O (l'origine) et de rapport k est donnée par $h_{0,k}(z) = kz$. Son inverse est donnée par $h_{0,\frac{1}{k}}(z) = \dfrac{1}{k}z$.

5.3 Rotations

Soit Ω un point du plan complexe et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application qui à tout point M associe le point M' défini par :

$$\text{le vecteur } \overrightarrow{\Omega M'} \text{ s'obtient par une rotation d'angle (orienté) } \theta \text{ du vecteur } \overrightarrow{\Omega M}.$$

Or, on a vu que multiplier un complexe par $e^{i\theta}$ revient à augmenter son argument de θ, donc à lui appliquer une rotation de centre l'origine et d'angle θ, et il en va de même pour les affixes des vecteurs. Donc, en notant z, z' et ω les affixes de M, M' et ω, on retiendra que

Définition 11.40 – **Application rotation**

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. LA rotation de "centre" ω et d'angle θ est l'application :

Théorème 11.41

La rotation $\rho_{\omega,\theta}$ est une transformation (i.e. est bijective) et son inverse est l'homothétie $\rho_{\omega,-\theta}$, i.e. la rotation de "centre" ω et d'angle $-\theta$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\rho_{\omega,\theta} \circ \rho_{\omega,-\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et $\rho_{\omega,-\theta} \circ \rho_{\omega,\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. □

Exemple. La rotation de centre O (l'origine) et d'angle θ est définie par $\rho_{0,\theta}(z) = e^{i\theta}z$ et son inverse est $\rho_{0,-\theta}(z) = e^{-i\theta}z$.

5.4 Similitudes directes

Définition 11.42

On dit qu'une application $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude directe s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $s(z) = az + b$.



Ici a et b sont des complexes, pas nécessairement des réels !

Une propriété importante est que toute similitude directe peut s'écrire ou bien comme une translation, ou bien comme une composée d'une rotation et d'une homothétie. Reconnaitre une similitude, c'est identifier précisément quelles sont les transformations du plan qui la constituent.

Définition 11.43

Soit $f : E \to E$ une application. Un élément x de E est appelé un point fixe de f si $f(x) = x$.

Lemme 11.44

Si $a \neq 1$, alors la similitude $s : z \mapsto az + b$ admet un unique point fixe $\omega \in \mathbb{C}$ donné par $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Démonstration.

□

Méthode – Reconnaitre une similitude directe

Soit $s : z \mapsto az + b$ une similitude directe (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

- Si $a = 1$, alors $s(z) = z + b$: s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors s admet un unique point fixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Le point Ω d'affixe ω est appelé le centre de la similitude. Ensuite, on écrit a sous la forme trigonométrique : $a = re^{i\theta}$. Alors :

$$s = h_{\omega,r} \circ \rho_{\omega,\theta} = \rho_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,r}$$

Autrement dit, s est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport r et d'une rotation de centre Ω et d'angle θ.

Exceptionnellement ici, on a $h_{\omega,r} \circ \rho_{\omega,\theta} = \rho_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,r}$: une homothétie et une rotation commutent lorsqu'elles ont le même centre (ici ω). On peut vérifier qu'à tout point M du plan, on peut appliquer d'abord l'homothétie puis la rotation ou faire l'inverse : le point image sera identique.

Exemple. Reconnaitre la similitude s définie par $s(z) = -2iz + 6i + 3$.

Remarque (Hors-programme)**.** Les similitudes directes sont exactement toutes les transformations du plan qui conserve les rapports entre distances et les angles orientés : si on note A', B', C', D' les images de A, B, C, D par une similitude directe, on a (en supposant $A \neq B$ et $C \neq D$) :

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Il existe des transformations du plan (i.e. bijectives) qui ne sont pas des similitudes directes, telles que la conjuguaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. Il s'agit en fait d'une *similitude indirecte*, car elle transforme un angle θ en $-\theta$. Mais cela n'est pas au programme.

6 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est...

- injective : on montre la définition.
- surjective : on montre la définition, ce qui implique de trouver une solution de l'équation $y = f(x)$ pour un $y \in F$ quelconque.

Pour montrer que f n'est pas injective, on montre la négation de la définition avec un contre-exemple. Idem pour montrer que f n'est pas surjective.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut :

- Montrer que f est injective et surjective.
- Pour chaque $y \in F$, résoudre l'équation suivante (d'inconnue $x \in E$)

$$(\text{Eq}_y) : \quad y = f(x)$$

  et montrer qu'il existe exactement une solution x_0 (qui dépend a priori de y). De plus, l'application f^{-1} est la fonction qui à y associe cette solution x_0.
- Si E est un intervalle I et que $F \subset \mathbb{R}$, utiliser le théorème de la bijection.
- Trouver une application $g : F \to E$ qui vérifie $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. On a alors en plus $g = f^{-1}$.

Pour montrer que f n'est PAS bijective, on peut montrer que f n'est pas injective OU que f n'est pas surjective.